# 第6講　2次曲線と極座標

6

［A］　媒介変数 $\theta$ を用いて表される曲線

$$C: x=\sin\theta,\quad y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

がある．

(1)　$x$ と $y$ の間の関係式を求めよ．

(2)　曲線 $C$ の概形をかけ．

(3)　曲線 $C$ の囲む図形を $y$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．

［B］　点Pの極座標 $(r,\ \theta)$ が次の極方程式を満たす．

$$r=2\cos\theta+2\sin\theta$$

ここで，極方程式においては，$r$ が負である極座標の点も考える．すなわち，$r>0$ のとき，極座標 $(-r,\ \theta)$ は $(r,\ \theta+\pi)$ と同じ点を表すものとする．次の問いに答えよ．

(1)　$\theta$ が $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，点Pの軌跡を求め図示せよ．

(2)　$\theta$ が $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，$|r|$ の最小値 $r_1$ とそれを与える $\theta_1$，および $|r|$ の最大値 $r_2$ とそれを与える $\theta_2$ を求めよ．

(3)　$\theta$ が $\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，Pが描く図形の長さを求めよ．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第６講　２次曲線と極座標

6　極方程式

$$r=\frac{b}{1-a\cos\theta}\quad (b\neq 0,\ 0<a<1)$$

で与えられる曲線と，媒介変数表示された曲線

$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{3}\cos t \\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin t \end{cases}$$

を $x$ 軸方向へ $\dfrac{2}{3}$ だけ平行移動した曲線が一致するように $a$，$b$ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第６講　２次曲線と極座標

6

［A］ 媒介変数 $\theta$ を用いて表される曲線

$$C : x=\sin\theta,\quad y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

がある.

(1) $x$ と $y$ の間の関係式を求めよ.

(2) 曲線 $C$ の概形をかけ.

(3) 曲線 $C$ の囲む図形を $y$ 軸のまわりに１回転してできる立体の体積を求めよ.

［B］ 点Ｐの極座標 $(r,\ \theta)$ が次の極方程式を満たす.

$$r=2\cos\theta+2\sin\theta$$

ここで，極方程式においては，$r$ が負である極座標の点も考える．すなわち，$r>0$ のとき，極座標 $(-r,\ \theta)$ は $(r,\ \theta+\pi)$ と同じ点を表すものとする．次の問いに答えよ.

(1) $\theta$ が $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，点Ｐの軌跡を求め図示せよ.

(2) $\theta$ が $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，$|r|$ の最小値 $r_1$ とそれを与える $\theta_1$，および $|r|$ の最大値 $r_2$ とそれを与える $\theta_2$ を求めよ.

(3) $\theta$ が $\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，Ｐが描く図形の長さを求めよ.

**【答】** ［A］ (1) $2x^2-2xy+y^2=1$ (2) 略 (3) $\dfrac{2(2+\sqrt{2})}{3}\pi$

［B］ (1) 略 (2) $\begin{cases} r_1=0 & \left(\theta_1=\dfrac{3}{4}\pi\right) \\ r_2=2 & \left(\theta_2=\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right) \end{cases}$ (3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

**【解説】**

［A］ (1)

$$\begin{aligned} y&=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \\ &=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &=\sin\theta+\cos\theta \end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} \sin\theta=x \\ \cos\theta=y-x \end{cases}$$

となるので

$$\begin{aligned} &\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \\ \iff\ & x^2+(y-x)^2=1 \\ \iff\ & \boldsymbol{2x^2-2xy+y^2=1} \end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2) $\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$$

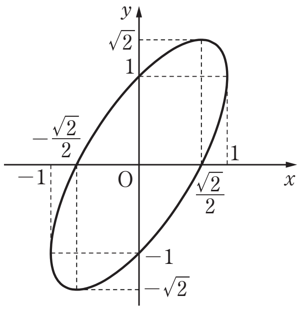
$$\frac{dy}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $y'$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x,\ y)$ | | ↗ | | ↘ | | ↙ | | ↖ | | ↗ | |

ここで $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi$ に対応する点の座標はそれぞれ

$$(0,\ 1),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right),\ (1,\ 1),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}\right),$$
$$(-1,\ -1),\ (0,\ 1)$$

となるので曲線 $C$ は下図.




(3)
$$2x^2-2xy+y^2=1$$
$$\iff\quad x=\frac{1}{2}\left(y\pm\sqrt{2-y^2}\right)$$

これと(2)のグラフの対称性より求める体積を $V$ とすると,

$$\begin{aligned}
\frac{V}{2\pi}&=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{4}\left(y+\sqrt{2-y^2}\right)^2dy-\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{4}\left(y-\sqrt{2-y^2}\right)^2dy\\
&=\frac{1}{4}\left\{\int_0^{\sqrt{2}}\left(2+2y\sqrt{2-y^2}\right)dy-\int_1^{\sqrt{2}}\left(2-2y\sqrt{2-y^2}\right)dy\right\}\\
&=\frac{1}{4}\left\{\left[2y-\frac{2}{3}(2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}-\left[2y+\frac{2}{3}(2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\sqrt{2}}\right\}\\
&=\frac{1}{4}\left\{2\sqrt{2}+\frac{4}{3}\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\left(2+\frac{2}{3}\right)\right\}\\
&=\frac{2+\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\therefore \quad V=\frac{\boldsymbol{2(2+\sqrt{2})}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{\pi}$$

［B］ (1)(Ⅰ)　$r=0$ のとき，

$$2\cos\theta+2\sin\theta=0$$

$$\iff 2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\therefore \quad \theta=\frac{3}{4}\pi \quad \left(\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi \text{ より}\right)$$

よって

$$(x,\ y)=(0,\ 0)$$

(Ⅱ)　$r\neq0$ のとき $\left(\theta\neq\frac{3}{4}\pi \text{ のとき}\right)$

$$r=2\cos\theta+2\sin\theta$$

$$\iff r^2=2r\cos\theta+2r\sin\theta$$

$$\iff x^2+y^2=2x+2y$$

$$\iff (x-1)^2+(y-1)^2=2$$

ここで $\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{3}{4}\pi$ のとき

$$r=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>0$$

よって

$$x=r\cos\theta\leqq0,\ y=r\sin\theta>0$$

また $\frac{3}{4}\pi<\theta\leqq\pi$ のときも同様に

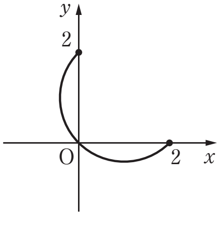
$$r<0,\ x=r\cos\theta>0,\ y=r\sin\theta\leqq0$$

よって

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \text{ の } 0<x+y\leqq2 \text{ の部分}$$

(Ⅰ)(Ⅱ)より求める軌跡は

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \text{ かつ } xy\leqq0$$




ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　(1)より

$$\begin{cases} \boldsymbol{r_1=0} & \left(\boldsymbol{\theta_1=\frac{3}{4}\pi}\right) \\ \boldsymbol{r_2=2} & \left(\boldsymbol{\theta_2=\frac{\pi}{2},\ \pi}\right) \end{cases}$$

(3)　(1)より $\frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，P は半径 $\sqrt{2}$ の 4 分の 1 円上を動くので，求める図形の長さは

$$2\times\sqrt{2}\times\pi\times\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}$$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第６講　２次曲線と極座標

6　極方程式

$$r=\frac{b}{1-a\cos\theta}\quad(b\neq 0,\ 0<a<1)$$

で与えられる曲線と，媒介変数表示された曲線

$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{3}\cos t \\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin t \end{cases}$$

を $x$ 軸方向へ $\dfrac{2}{3}$ だけ平行移動した曲線が一致するように $a$，$b$ の値を求めよ．

**【答】** $a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$

**【解説】**

$$r=\frac{b}{1-a\cos\theta} \iff r-ar\cos\theta=b$$
$$\iff r=ar\cos\theta+b$$
$$\iff \sqrt{x^2+y^2}=ax+b$$

両辺を２乗すると

$$x^2+y^2=(ax+b)^2$$
$$\iff (1-a^2)x^2+y^2-2abx-b^2=0$$

ここで

$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{3}\cos t \\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin t \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{3}{4}x=\cos t \\ \dfrac{3}{2\sqrt{3}}y=\sin t \end{cases}$$

よって

$$\frac{9}{16}x^2+\frac{3}{4}y^2=1$$

この曲線を $x$ 軸方向へ $\dfrac{2}{3}$ だけ平行移動したものは

$$\frac{9}{16}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=1$$
$$\iff \frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{3}$$
$$\iff \frac{3}{4}x^2+y^2-x-1=0$$

２つの曲線が一致するので

$$\begin{cases} 1-a^2=\dfrac{3}{4} \\ -2ab=-1 \\ -b^2=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} \boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}} \\ \boldsymbol{b=1} \end{cases}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。